BANACH - ALAOGLU & TYCHONOV

Sia E uno spazio di Banach $\left(\begin{array}{l}\text{spazio vettoriale} \\ \text{normato e} \\ \text{completo}\end{array}\right)$

$E^* = \{ \xi : E \to \mathbb{R} : \xi \text{ lineare e continuo} \}$.

E^* è di Banach con norma $\|\xi\| = \sup\limits_{x \in B_1} |\xi(x)|$

$B_1 = \{ x \in E : \|x\| \leq 1 \}$

$B_1^* = \{ \xi \in E^* : \|\xi\| \leq 1 \}$

la topologia debole su E è la topologia meno fine che rende continue tutte

le funzioni $\xi \in E^*$ $\quad x \mapsto \xi(x)$

la topologia debole-* su E^* è la topologia meno fine che rende continue tutte

le funzioni $\quad f_x : E^* \to \mathbb{R} \quad f_x(\xi) = \xi(x)$

<u>Lemma</u> Sia τ la topologia meno fine su X che rende continue tutte le funzioni $f_i : X \to X_i$.

Allora:

(i) Se Z è uno s.t. e $\Phi : Z \to X$ risulta che Φ è continua $\Leftrightarrow$ $f_i \circ \varphi$ è continua $\forall i$.

(ii) Una base di intorni di $x \in X$ è data dalle intersezioni finite di controimmagini π_i^{-1} di intorni V_i di x_i in X_i:

$$\bigcap_{k=1}^{N} f_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$$

$x_k \to x$ indica $x_k \to x$ in topologia debole su E.

se $x_k \to x$ allora ovviamente $\forall$ $\xi(x_k) \to \xi(x)$ $\forall \xi \in E^*$

Viceversa se $\xi(x_k) \to \xi(x)$ $\forall \xi \in E^*$

significa che $\forall U_\xi$ intorno di $\xi(x)$

si ha $\xi(x_k) \in U_\xi$ definitivamente.

cioè $x_k \in \xi^{-1}(U_\xi)$ definitivamente

Dunque $\forall \xi_1 \dots \xi_N$ $\forall U_{\xi_1} \dots U_{\xi_N}$

si ha $x_k \in \bigcap_{k=1}^{N} \xi_k^{-1}(U_{\xi_k})$ definitivamente

dunque $x_k \to x$. (è la convergenza puntuale)

$\xi_k \xrightarrow{*} \xi$ in E^* se $\xi_k(x) \to \xi(x)$ $\forall x \in E$

stessa dimostrazione.

Teorema (Tychonov) Sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ prodotto di s.t. X_i compatti e T_2, $i \in I$.

$x \in X$ $x = (x_i)_{i \in I}$. $\pi_i : X \to X_i$ $\pi_i(x) = x_i$.

La topologia meno fine su X che rende continue le proiezioni π_i rende X compatto.

(TOPOLOGIA PRODOTTO).

dim (DOPO)

Teorema (BANACH-ALAOGLU)

- B_1^* è debole-$*$ compatto in E^*, E Banach.
- Se E è separabile allora B_1^* è anche debole-$*$ sequenzialmente compatto.

dim (Banach-Alaoglu)

(i) Notiamo che $E^* \subseteq \mathbb{R}^E = \prod_{x\in E} \mathbb{R} = \{f : E \to \mathbb{R}\}$

e la topologia debole-$*$ su E^* non è altro che la topologia indotta dalla topologia prodotto su $\mathbb{R}^E$.

Infatti chiamata $\phi : E^* \longrightarrow \mathbb{R}^E$ l'inclusione $\phi(\xi) = \xi$. $\xi = (\xi_x)_{x\in E}$.
si ha che ϕ è continua per il lemma, in quanto $\pi_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$ è nient'altro che $\pi_x(\xi) = \xi(x)$ che per definizione è continuo se $\xi \in E^*$.
lo stesso vale per $\Phi^{-1} : E^* \subseteq \mathbb{R}^E \to E^*$
in quanto $\pi_x \circ \Phi^{-1} = \pi_x : E^* \to \mathbb{R}$ come sopra.

Dunque $\Phi : E^* \longrightarrow E^* \subseteq \mathbb{R}^E$ è un omeomorfismo.

(ii) $B_1^* = K \cap C$ con

$$C = \{\xi \in \mathbb{R}^E : \xi \text{ lineare}\}$$

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^E : |\xi(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in E\}$$

Per dimostrare che B_1^* è debole-$*$ compatto in E^* basterà mostrare che K è compatto e C è chiuso in $\mathbb{R}^E$.

(a) $K \subseteq \mathbb{R}^E$ è compatto.

$$K = \{\xi \in \mathbb{R}^E : |\xi(x)| \leq \|x\|\} = \prod_{x\in E} [-\|x\|, \|x\|] \subseteq \mathbb{R}^E$$

ma $[-\|x\|, \|x\|]$ è compatto in $\mathbb{R}$ dunque per Tychonov K è compatto
(notare che la topologia indotta dal prodotto $\mathbb{R}^E$ su $\prod_{x\in E}[-\|x\|, \|x\|]$ è proprio la topologia prodotto. (sempre per il Lemma, l'inclusione è omeomorfismo))

(b) C è chiuso.

$$C = \left\{\xi \in \mathbb{R}^E : \begin{array}{ll} \forall x,y \in E & \xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y) \text{ e} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & \xi(\lambda x) = \lambda \xi(x) \end{array}\right\}$$

Ovvero $C = \bigcap_{x,y\in E} \{\xi : \xi(x+y) - \xi(x) - \xi(y) = 0\} \cap$
$$\cap \bigcap_{\substack{x\in E \\ \lambda\in\mathbb{R}}} \{\xi : \xi(\lambda x) - \lambda\xi(x) = 0\}$$

Ma $f_x(\xi) = \xi(x)$ è continuo in ξ $f_x \in E^{**}$ -

$$\|f_x\| = \sup_{\|\xi\|\leq 1} |\xi(x)| \leq \|x\|. \text{ perché } |\xi(x)| \leq \|\xi\| \cdot \|x\|$$

dunque $\xi \mapsto \xi(x+y) - \xi(x) - \xi(y)$ è continua
e analogamente $\xi \mapsto \xi(\lambda x) - \lambda\xi(x)$ è continua. Dunque C è intersezione di chiusi è chiuso $\square$

Preliminari per dimostrare Tychonov.

Osservazione X è compatto se: $\tau(X) = \{\text{aperti di } X\}$

$$\forall \mathcal{G} \subseteq \tau(X): \quad \bigcup \mathcal{G} = X \Rightarrow \exists \mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G} \text{ finito t.c. } \bigcup \mathcal{G}_0 = X.$$

Posto $\mathcal{F}^c = \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\} = \{\text{famiglia dei complementari}\}$

$\tau^c(X) = \{\text{chiusi}\}$

$$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q \Rightarrow \neg P$$

X è compatto sse:

$$\forall \mathcal{F} \in \tau^c(X): \ \forall \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \text{ finito } \bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$$
$$\Downarrow$$
$$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset.$$

Def $\mathcal{F}$ soddisfa **PIF** (proprietà della intersezione finita) se $\forall \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finito $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

X compatto se ogni $\forall \mathcal{F} \subseteq \tau^c(X)$ PIF si ha $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Dim (Tychonov) $X = \prod_i X_i \qquad \pi_i : X \to X_i$

con topologia prodotto (la meno fine che rende continue π_i)

Sia $\mathcal{F} \subseteq \{\text{chiusi di } X\}$ con la PIF.

Possiamo considerare $\hat{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{F}$ massimale con la PIF

cioè $\mathcal{F} \subseteq \hat{\mathcal{F}} \subseteq \{\text{chiusi di } X\}$, $\forall C$ chiuso di X
si ha che $\exists \mathcal{F}_0 \subseteq \hat{\mathcal{F}}$ finito tale che
$C \cap \bigcap \mathcal{F}_0 = \emptyset$
Tramite il lemma di Zorn esiste $\hat{\mathcal{F}}$ massimale $\supseteq \mathcal{F}$.
e ovviamente se $\bigcap \hat{\mathcal{F}} = \emptyset$ anche $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
Senza perdere di generalità posso quindi supporre che $\mathcal{F}$ sia già massimale.

Sia $\mathcal{F}_i \subseteq \{\text{chiusi di } X_i\}$ $\mathcal{F}_i = \{\overline{\pi_i(A)} : A \in \mathcal{F}\}$
Visto che $\mathcal{F}$ ha la PIF anche tutti gli $\mathcal{F}_i$ ce l'hanno!
ed essendo X_i compatto si ha $\bigcap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$.
Sia $x_i \in \overline{\pi_i(A)}$ $\forall A \in \mathcal{F}$.
Sia $x = (x_i)_{i \in I}$, $x \in X$ $\pi_i(x) = x_i$.

- Basterà mostrare che $x \in \bigcap \mathcal{F}$ cioè $x \in A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.
- Visto che A è chiuso basta dimostrare che $x \in \bar{A} = A$ cioè che $\forall U$ intorno di x si ha $U \cap A \neq \emptyset$.

Fissiamo dunque $A \in \mathcal{F}$ e U intorno di x.
U deve contenere un elemento della base di intorni di x cioè

$$U \supseteq \bigcap_{k=1}^{N} \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$$

con U_k intorno di x_{i_k} in X_{i_k}.

Ma $\overline{\pi_{i_k}(A)} \in \mathcal{F}_i$ e dunque $x_{i_k} \in \bigcap \mathcal{F}_i \subseteq \overline{\pi_{i_k}(A)}$

Visto che U_k è un intorno di x_{i_k} deve dunque essere $\quad U_k \cap \pi_{i_k}(A) \neq \emptyset \quad$ (per definizione di chiusura)

e quindi $\quad \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \cap A \neq \emptyset$

da cui $\quad U \cap A \neq \emptyset$ come volevamo dimostrare.

$\square$